Gry Nieskończone

Krzysztof Plotka

Prae57DMag)sto5Pr9a

Spis treści

Wstęp

Praca ta dotyczy gier nieskończonych z doskonałą informacją, tzn. gier, w których gracze wykonując ruch znają wszystkie wcześniejsze. W pierwszym paragrafie omawiamy grę Banacha-Mazura, podajemy definicję strategii, strategii wygrywającej oraz zbioru zdeterminowanego. Następnie podajemy charakteryzację zbiorów zdeterminowanych. W tym paragrafie zostaje podane i udowodnione twierdzenie Zindulki o rozbiciu dowolnej przestrzeni metrycznej bez punktów izolowanych na sumę dwóch zbiorów: miary zero i I-kategorii. W paragrafie drugim zajmujemy się innym przykładem gry nieskończonej. Gra ta została sformułowana przez autora pracy. Podane są pewne własności tej gry, między innymi jej związek ze zmodyfikowaną wersją gry Banacha-Mazura. Dalsza część pracy jest poświęcona aksjomatowi determinacji, do którego określenia wykorzystuje się teorię gier nieskończonych. Podajemy sformułowanie tego aksjomatu, pewne równoważne formy oraz konsekwencje. Krótko zostaje również zreferowany pne-

Terminologia i oznaczenia.

Przez przedział na prostej rozumiemy przedział postaci $[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < +\infty$. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy przez R.

Przestrzeń nieskończonych ciągów liczb naturalnych ω^ω z metryką

$$\rho(s, t) = (\min\{n : s_n = t_n\} + 1)^{-1}, \quad (s = t)$$

nazywamy przestrzenią Baire'a. Przestrzeń Cantora 2^ω jest podprzestrzenią ω^ω. $\omega^{<\omega}$ oraz $2^{<\omega}$ oznaczają zbiór skończonych ciągów (w tym również ciąg pusty) elementów zbiorów odpowiednio ω i $\{0, 1\}$. Niech $s = \ s_0, s_1, \ldots, s_n\ , p = \ p_0, p_1, \ldots, p_m \quad \omega^{<\omega}$. Przez $s \quad p$ oznaczamy ciąg $\ s_0, \ldots, s_n, p_0, \ldots, p_m\ $.

Przez A^0, A , $\overline{\overline{A}}$ oznaczamy odpowiednio wnętrze, dopełnienie oraz moc zbioru A.

$2^{\ 0} = \overline{\overline{2^\omega}}$.

$[X]^\omega = \{A \quad X : \overline{\overline{A}} = \ _0\}$.

Przez m oznaczamy jednowymiarową miarę Lebesgue'a.

WAC oznacza następującą słabszą wersję aksjomatu wyboru AC:

Dla każdej rodziny zbiorów niepustych F takiej, że $\overline{\overline{F}} \leq \ _0$ oraz $\overline{\overline{F}} \leq 2^{\ 0}$ istnieje funkcja wyboru.

§1. Gra Banacha-Mazura.

Gra Banacha-Mazura jest jednym z wielu przykładów matematycznych gier nieskończonych. Została wymyślona przez S.Mazura, ale podstawowe twierdzenie dotyczące tej gry udowodnił Banach (stąd nazwa). Zasady tej gry opisujemy poniżej.

Rozważmy przedział I_0 na prostej oraz pewien wyróżniony jego podzbiór A. W grze uczestniczy dwóch graczy: gracz (I) i gracz (II). Grę rozpoczyna gracz (I), który wybiera przedział I_1 zawarty w I_0. Ruch gracza (II) polega na wyborze przedziału $I_2 \subset I_1$. Następnie gracz (I) wybiera $I_3 \subset I_2$, itd. W ten sposób gracze określają nieskończony ciąg zstępujących przedziałów $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ (ciąg ten nazywamy wynikiem gry), przy czym przedziały o indeksach nieparzystych zostały wybrane przez gracza (I), pozostałe zaś przez gracza (II). Gra jest wygrana przez gracza (I), jeśli

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \cap A = \emptyset .$$

W przeciwnym przypadku wygrywa gracz (II). Grę z tak określonymi regułami oraz wyróżnionymi przedziałem I_0 i zbiorem A oznaczymy przez $\langle I_0, A \rangle$.

Jak w przypadku np. gier karcianych, tak również w przypadku matematycznych gier nieskończonych powstaje pytanie, jak gracze "powinni grać", aby być pewni swojej wygranej, i czy w ogóle istnieje taka "zwycięska metoda gry" dla któregoś z nich. Metodę, na podstawie której dany gracz będzie dokonywał wyborów nazwiemy strategią danego gracza. Mówiąc ściśle: **strategią gracza (I)** nazywamy funkcję f określoną na zbiorze $\{(I_0, I_1, \ldots, I_{2n}) : I_0 \supset I_1 \supset \ldots$

$I_{2n}, n \quad \omega\}$ o wartościach w zbiorze $\{I : I \quad I_0\}$ spełniającą warunek:

$$(1) \qquad f(I_0, \ldots, I_{2n}) \quad I_{2n} \qquad (n \quad \omega).$$

Podobnie określamy strategię dla gracza (II). Jest to funkcja

$$g : \{(I_0, I_1, \ldots, I_{2n+1}) : I_0 \quad I_1 \quad \ldots \quad I_{2n+1}, n \quad \omega\} \longrightarrow \{I : I \quad I_0\}$$

o własności

$$(2) \qquad f(I_0, \ldots, I_{2n+1}) \quad I_{2n+1} \quad (n \quad \omega).$$

Strategię f nazwiemy **zwycięską dla gracza (I)**, jeśli gracz ten grając zgodnie z tą strategią (tzn. wybierając w swoim n-tym ruchu przedział $f(I_0, I_1, \ldots, I_{(2n-1)})$, gdzie $I_1, \ldots, I_{(2n-1)}$ wcześniej wybrane przedziały) wygrywa bez względu na to jak grał (II). Podobnie określamy zwycięską strategię dla gracza (II). Teraz wcześniejsze pytanie możemy sformułować następująco: czy w grze I_0, A istnieje zwycięska strategia dla któregoś z graczy? Oczywiście odpowiedą na to pytanie będzie zależała od własności zbioru A.

Zbiór $A \quad I_0$ nazywamy **zdeterminowanym dla gracza (I)** w grze I_0, A, jeśli istnieje zwycięska strategia dla (I). Mówimy wtedy również, że gra I_0, A jest zdeterminowana dla (I). Analogicznie określamy zbiór zdeterminowany dla gracza (II).

Poniżej podamy twierdzenie charakteryzujące zbiory zdeterminowane dla (II) w grze Banacha-Mazura (patrz [13], Tw 6.1).

Twierdzenie 1. *Gracz (II) posiada zwycięską strategię w grze I_0, A wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem I-kategorii.*

Dowód.

( )

Załóżmy, że A jest zbiorem I-kategorii. Czyli $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, gdzie A_n jest zbiorem nigdziegęstym dla $n = 0, 1, \ldots$. Zdefiniujemy teraz zwycięską strategię dla (II).

Niech $I_0, I_1, \ldots, I_{2n+1}$ będzie ciągiem przedziałów takim, że $I_{i+1} \quad I_i$. Ponieważ zbiór A_n jest nigdziegęsty, więc istnieje przedział $I_{2n+2} \quad I_{2n+1}$ rozłączny z A_n.

Kładziemy $g(I_0, I_1, \ldots, I_{2n+1}) := I_{2n+2}$. Określiliśmy więc strategię dla gracza (II). Uzasadnimy teraz, że jest to strategia zwycięska.

Niech $\; I_n \;\; _{n \;\; \omega}$ będzie wynikiem gry $\; I_0, A \;$. Jeśli (II) grał zgodnie z g, to

$$I_{2n+2} \cap A_n = \quad (n \quad \omega).$$

Stąd i z tego, że $\; I_n \;\; _{n \;\; \omega}$ jest ciągiem zstępującym otrzymujemy

$$\bigcap_k I_k \cap A_n = \quad (n \quad \omega).$$

A ponieważ $A = \bigcup A_n$, więc

$$\bigcap I_n \cap A = \quad .$$

To znaczy, że g jest zwycięską strategią dla (II).

( )

Niech będzie dana zwycięska strategia g dla gracza (II). skonstruujemy najpierw ciąg przedziałów $J_i \quad I_0^0 \quad (i \quad \omega)$ o własnościach:

(i) $K_i \stackrel{\text{def}}{=} g(I_0, J_i)$ są wzajemnie rozłączne dla $i \quad \omega$,

(ii) zbiór $\bigcup K_i^0$ jest gęsty w I_0.

Konstrukcja.

Niech $S = \quad S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ będzie różnowartościowym ciągiem wszystkich przedziałów o końcach wymiernych zawartych w I_0^0.

$$J_0 \stackrel{\text{def}}{=} S_0$$

Załóżmy, że zostały zdefiniowane przedziały $J_0, J_1, \ldots, J_n$.
Niech $l_n \stackrel{\text{def}}{=} \min\{i : S_i \quad I_0 \setminus (K_0 \quad K_1 \quad \ldots \quad K_n)\}$. Wówczas

$$J_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} S_{l_n}.$$

J_{n+1} jest pierwszym z elementów S rozłącznym z każdym z przedziałów K_i dla $i = 0, 1, \ldots, n$.
W ten sposób skonstruowaliśmy ciąg $J_i \;\; {}_{i \quad \omega}$. Pokażemy, że spełnia on własności (i) oraz (ii).
ad(i). Niech $i, j \quad \omega$ oraz $i < j$. Ponieważ $K_j \quad I_0 \setminus (K_0 \quad \ldots \quad K_i \quad \ldots \quad K_{j-1})$, więc

$$K_j \cap K_i = \quad .$$

ad(ii). Przypuśćmy niewprost, że zbiór □ K_i^0 nie jest gęsty w I_0. To znaczy, że istnieje przedział $L \quad I_0$ taki, że

$$\square \; K_i^0 \cap L = \quad .$$

Niech $l_L \stackrel{\text{def}}{=} \min\{i : S_i \quad L\}$. S_{l_L} jest pierwszym z przedziałów w ciągu S, który zawiera się w L. Ponieważ $S_{l_L} \quad I_0 \setminus (K_0 \quad K_1 \quad \ldots \quad K_{l_L - 1})$, więc

$$S_{l_L} = J_i \quad (i = 0, \ldots, l_L - 1).$$

A stąd i z definicji $J_i \;\; {}_{i \quad \omega}$ wnioskujemy, że

$$J_{l_L} = S_{l_L}.$$

Dalej mamy

$$\Big(\bigcup K_i^0 \cap L\Big) \qquad K_{I_L}^0 \cap L = K_{I_L}^0 = \qquad \text{(sprzeczność).}$$

Dla każdego z przedziałów K_i z osobna możemy teraz określić ciąg przedziałów $J_{ij} \;\; j \;\; \omega$ taki, że $K_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} g(I_0, J_i, K_i, J_{ij})$ są wzajemnie rozłączne dla $j \quad \omega$ oraz zbiór $\bigcup_j K_{ij}^0$ jest gęsty w K_i^0. Ponieważ $\bigcup_i K_i^0$ jest gęsty w I_0, więc $\bigcup_{i,j} K_{ij}^0$ jest gęsty w I_0. Postępując tak dalejj

Niech teraz $G_n \overset{\mathrm{def}}{=} \square_{i_0 \ldots i_n} K^0_{i_0 \ldots i_n}$ dla $n \quad \omega$. Oznaczmy przez E zbiór $\square_n G_n$. Pokażemy, że E

Lemat 1. *Jeśli przestrzeń metryczna X zawiera podzbiór I-kategorii gęsty i μ jest borelowską miarą skończoną, to X można rozbić na sumę dwóch zbiorów: I-kategorii i μ-miary zero.*

Dowód.

Niech A

Niech $x_B \quad B$ dla każdego $B \quad B$. Określamy

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x_B : B \quad B_n\} \ \ (n \quad \omega) \ \text{ oraz } \ A \stackrel{\text{def}}{=} \ A_n.$$

Z własności B_n wynika, że A_n nie ma punktów skupienia. Stąd $X \setminus A_n$ jest gęsty w X (X nie ma punktów izolowanych). Wobec tego A_n jest nigdziegęsty, więc A jest I-kategorii. Z definicji A wynika, że jest on gęsty. ∎

Twierdzenie 2 daje odpowiedą na wcześniej postawione pytanie. Istnieje $A_0 \quad I_0$ I-kategorii i taki, że $m(A_0) = m(I_0)$. A to znaczy, że (II) ma zwycięską strategię w grze I_0, A_0 . Jest to ciekawe z tego powodu, że "zadaniem" gracza (II) jest "ominąć" dany zbiór, a okazuje się to możliwe w tym przypadku, mimo dużej miary A_0.

Przed podaniem twierdzenia charakteryzującego zbiory zdeterminowane dla (I) zdefiniujemy pojęcie zbioru I-kategorii w punkcie.

Definicja *Zbi E R nazywamy I-kategorii w punkcie x* R, *i istnieje otoczen U_x nktu x takie, że zbiór $U_x \cap E$ jest I-ka orii w* R.

Zbiór unktów x R, w których jest I-kateg zymy ez *naz*

9("za8
.09 6a288.6599 918Td3 1]TJ 7 14.346 Tf 13.255 0 Td[(ie,)]TJ 6 46 Tf 20 37 0 T6zpu 14.34 49.365 095[(7czy

Fakt 2. *Zbiór $E \quad E_I$ nie jest zbiorem I-kategorii w żadnym punkcie, tzn.*

$$(E \quad E_I)_I = \quad .$$

Dowód.

Przypuśćmy, że $(E \quad E_I)_I = \quad$. Istnieje więc $x \quad$ R oraz otoczenie U_x punktu x takie, że

$$U_x \cap (E \quad E_I) \text{ jest I-kategorii.}$$

Każdy podzbiór R otwarty i niepusty jest II-kategorii, więc $U_x \cap E_I = \quad$ (E_I jest otwarty-Fakt 1). Dalej, ponieważ $U_x \cap E$ jest I-kategorii, więc $x \quad E_I$, co jest sprzeczne z tym, że $U_x \cap E_I = \quad$. ■

Fakt 3. *Zbiór $E \cap E_I$ jest zbiorem I-kategorii.*

Dowód.

Rozpatrzmy następującą rodzinę

$W = \{I : I$ -przedział o końcach wymiernych i $I \cap E$ jest I-kategorii$\}$.

Z określenia widać, że jest to rodzina przeliczalna. Zachodzi

$$E \cap E_I = E \cap \square W = \square_{I \quad W} E \cap I.$$

Stąd wynika, że $E \cap E_I$ jest I-kategorii. ■

Twierdzenie 3 [1]. *Gracz (I) posiada zwycięską strategię w grze I_0, A wtedy i tylko wtedy, gdy $I_0 \setminus A$ jest zbiorem I-kategorii w pewnym punkcie I_0.*

---

[1]patrz [13], Tw. 6.2

Dowód.

Niech f będzie zwycięską strategią gracza (I). Możemy przyjąć, że $|f(I_0,\dots,I_{2n+2})| \le \frac{1}{2}|I_{2n+2}|$ dla dowolnego ciągu $I_0 \quad \dots \quad I_{2n+2}$. Wówczas funkcja $g(I_1,\dots,I_{2n+2}) \stackrel{\text{def}}{=} f(I_0,I_1,\dots,I_{2n+2})$ jest strategią gracza (II) w grze $I_1, I_1 \setminus A$, gdzie $I_1 = f(I_0)$. Jeśli ciąg $I_1, I_2,\dots,I_n,\dots$ jest zgodny z g, to $\bigcap_1^\infty I_n \cap A = \bigcap_0^\infty I_n \cap A = \ $, ale ponieważ $\bigcap_0^\infty I_n$ jest jednoelementowy ($|(I_n)| \to 0$), więc $\bigcap_1^\infty I_n \quad A$. A to znaczy, że g jest zwycięską strategią (II). Czyli $I_1 \setminus A$ jest I-kategorii (Tw. 1).

Z drugiej strony, jeśli $I_0 \setminus A$ jest zbiorem I-kategorii w pewnym punkcie I_0, to istnieje przedział $I \quad I_0$ taki, że zbiór $I \cap (I_0 \setminus A) = I \cap$

żaden ze zbiorów $I \cap B$, ani $I \cap B$ nie jest I-kategorii. Czyli widać (Tw.1, Tw.3), że gra I_0, $I_0 \cap B$ nie jest zdeterminowana dla żadnego z graczy.

Twierdzenie 4 [2]. *Jeśli każdy podzbiór I_0 jest zdeterminowany w grze Banacha- Mazura, to każdy podzbiór I_0 posiada wlasność Baire'a.*

a pewne rezultaty z nim związane omówiny w dalszej części pracy (§3 str. 26).

Na zakończenie tego rozdziału uogólninimy grę Banacha-Mazura. Niech G będzie rodziną podzbiorów I_0 taką, że każdy element G zawiera niepusty, otwarty podprzedział I_0 i na odwrót, tzn. każdy niepusty, otwarty podprzedział I_0 zawiera element rodziny G. Ustalmy zbiór $A \quad I_0$. Gra I_0, A, G jest określona następująco: gracze (I) i (II) wybierając na przemian elementy G, określają nieskończony zstępujący ciąg $G_0, G_1, \ldots$. Gracz (I) wygrywa, gdy $A \cap G_n =$. W przeciwnym przypadku wygrywa (II). Strategię oraz zdeterminowanie zbioru określa się analogicznie jak w grze I_0

§2. Gra szeregowa ($\sum a_n, A$).

Interesujące wydaje się rozważenie następującej gry nieskończonej. Niech $\sum a_n$

spełniające warunki:

$$f(\ \ )\quad [0, a_0],\qquad f(x_0, \ldots, x_{2n+1}$$

są ”zbyt duże”, aby (II) mógł je ”ominąć”. Bez narzucenia odpowiedniego warunku na szereg $\sum a_n$ nawet dla zbioru przeliczalnego może nie istnieć strategia zwycięska dla gracza (II).

Definicja. *Mówimy, że szereg* $\sum a_n$ *spelnia wlasność (*), jeśli istnieje*

Wtedy $b_k = a_k$ dla $k = 2n_i + 1, 2n_i + 3, \dots, 2n_{i+1} - 1$. Stąd

$$\sum_0^{\infty} b_n \geq \sum_0^{2n_i} b_n + a_{2n_i+1} + \dots + a_{2n_{i+1}-1} > \sum_0^{2n_i} b_n + \frac{1}{2} \sum_{2n_i+1}^{\infty} a_n > \alpha_i .$$

(2^0) $\alpha_i \geq \sum_0^{2n_i} b_n + \frac{1}{2} \sum_{2n_i+1}^{\infty} a_n$

Wtedy $b_k = 0$ dla $k = 2n_i + 1,\ 2n_i + 3, \dots,\ 2n_{i+1} - 1$. Stąd

$$\sum_0^{\infty} b_n \leq \sum_0^{2n_i} b_n + a_{2n_i+2} + \dots + a_{2n_{i+1}-2} + \sum_{2n_{i+1}}^{\infty} b_n \leq$$

$$\leq \sum_0^{2n_i} b_n - a_{2n_i+1} - \dots - a_{2n_{i+1}-1} + \sum_{2n_i+1}^{\infty} a_n < \sum_0^{2n_i} b_n + \frac{1}{2} \sum_{2n_i+1}^{\infty} a_n \leq \alpha_i .$$

Czyli $\sum_0^{\infty} b_n = \alpha_i$, co wobec dowolności α_i znaczy, że $\sum_0^{\infty} b_n \quad A$.

■

Jeśli w definicji własności (*) zastąpić ostrą nierówność przez słabą, to powyższe twierdzenie nie będzie prawdziwe. Podamy przykład, który to uzasadnia.

Przykład.

Rozważmy następujący szereg

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots .$$

(tzn. pierwszym wyrazem jest 1, a następnie parami występują wyrazy szeregu $\sum \frac{1}{2^n}$+ 3 szereg $\sum b_n$ o sumie równej

$$b_0 + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{(b_{2n-1} + b_{2n})}_{\frac{1}{2^n}} + \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Czyli grę wygrywa (I) (nawet zbiór jednoelementowy okazuje się ”za duży” dla gracza (II)).

Ponieważ w naszym przykładzie szereg $\sum a_n$ spełnia własność

$$\sum_i (a_{2i+1} + ($$

Na podstawie powyższego wniosku oraz Tw.1 można stwierdzić, że jeśli szereg $\sum a_n$ spełnia własności (*) i (**), to rodzina zbiorów zdeterminowanych w grze szeregowej zawiera σ-ciało generowane przez zbiory przeliczalne. A to znaczy, że rodzina ta ma moc co najmniej $2^{\aleph_0}$.

W dalszej części tego paragrafu ograniczymy się do przypadku, gdy szereg $\sum a_n$ jest szeregiem potęgowym. Zauważmy, że szereg potęgowy $\sum \alpha^n$ ($\alpha \in (0, 1)$) spełnia obie wcześniej określone własności ((*) i (**)), gdyż

$$\forall_{i \in \omega} \quad (\alpha^i + \alpha^{i+2} + \alpha^{i+4} + \ldots) > (\alpha^{i+1} + \alpha^{i+3} + \alpha^{i+5} + \ldots) \quad .$$

Dla tego typu gier podamy przykład zbioru zdeterminowanego dla gracza (I).

Definicja. *Liczbę* $x \in \mathbb{R}$ *nazywamy źle aproksymowalną (ang. badly approximable), jeśli istnieje stala* $c > 0$ *taka, że*

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^2},$$

dla dowolnych liczb calkowitych p, q $(q = 0)$.

Zbiór liczb źle aproksymowalnych oznaczymy przez Θ.

Interesująca jest następująca własność zbioru Θ.

Fakt 2. *Θ jest zbiorem I-kategorii.*

Dowód.

Pokażemy, że $\Theta = \bigcup \Theta_n$, gdzie Θ_n nigdziegęsty. Zdefiniujmy

$$\Theta_n = \{x : \ {}_{\frac{p}{q}\, q=0} \ |x - \frac{p}{q}| > \frac{1}{n+1} q^{-2}\}.$$

Równość $\Theta = \bigcup \Theta_n$ oczywiście zachodzi. Teraz uzasadnimy, że zbiór Θ_n jest nigdziegęsty ($n = 0, 1, \ldots$). Niech I dowolny przedział. Istnieje $\frac{p}{q} \in I^0$. Wówczas przedział $I \cap [\frac{p}{q} - \frac{1}{n+1} q^{-2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{n+1} q^{-2}]$ jest rozłączny z Θ_n, co dowodzi nigdziegęstości Θ_n. ∎

Twierdzenie 2. *Θ jest zbiorem miary Lebesgue'a zero.*

analogicznie $P(I_n) := [b_n - \alpha\rho_n, b_n]$.

Niech n_0 i t_0 takie liczby naturalne, że

$$n_0 \text{ jest parzysta i } \rho_{n_0} \leq \alpha^2\gamma$$

Wobec Faktu 1 wystarczy udowodnić, że gra $I_{\Sigma\alpha^n}, \Theta_\alpha, \square\ \alpha^n$ jest wygrana dla gracza (I).

Przedziały $I_1, I_3, \ldots, I_{n_0-1}$ gracz (I) może wybierać w dowolny sposób. Podamy teraz jak (I) powinien wybierać przedziały $I_{n_0+2nt_0+1}$, $I_{n_0+2nt_0+3}, \ldots, I_{n_0+2(n+1)t_0-1}$ dla $n \quad \omega$.

Niech $n \quad \omega$ dowolne ustalone. Z lematu wiemy, że istnieje co najwyżej jeden ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ taki, że

$$R^n \leq q < R^{n+1},$$

$$x \quad I_{n_0+2nt_0} \quad |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{\delta}{q^2}.$$

Czyli elementy $x \quad I_{n_0+2nt_0}$, które mają powyższą własność muszą należeć do pewnego przedziału C_n o długości

$$|C_n| \leq \frac{2\delta}{q^2} \leq 2\delta R^{-2n} = 2\delta\alpha^{2nt_0} \leq 2\frac{\rho_{n_0}\gamma}{4}\alpha^{2nt_0} = \frac{\gamma\rho_{n_0+2nt_0}}{2}.$$

Mogą zajść dwa przypadki: albo środek C_n leży po prawej albo po lewej stronie środka przedziału $I_{n_0+2nt_0}$. Rozpatrzmy pierwszą możliwość. Wówczas

$$x \quad C_n \quad x \geq s_{n_0+2nt_0} - \frac{\gamma\rho_{n_0+2nt_0}}{4}.$$

$$\leq s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}((1-\alpha)-(1-\alpha)\alpha) = s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma.$$

Stąd mamy, że $s_{n_0+2nt_0+2} \leq s_{n_0+2nt_0}$. Analogicznie otrzymujemy

$$s_{n_0+2nt_0+2i} \leq s_{n_0+2nt_0+2(i-1)}, \quad i = 2, \ldots, t_0.$$

Stąd

$$s_{n_0+2nt_0+2t_0} \leq s_{n_0+2nt_0+2} \leq s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma.$$

Zatem

$$b_{n_0+2nt_0+2t_0} \leq s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma + \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\alpha^{2t_0} <$$

$$< s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma + \frac{1}{4}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma = s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{4}\gamma\rho_{n_0+2nt_0}.$$

Stąd wynika, że C_n jest rozłączny z $I_{n_0+2(n+1)t_0}$.

Jeśli zachodzi drugi przypadek (tzn. środek C_n leży po lewej stronie środka $I_{n_0+2nt_0}$), to określamy

$$I_{n_0+2nt_0+2k+1} \stackrel{\text{def}}{=} P(I_{n_0+2nt_0+2k}) \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, t_0 - 1.$$

Podobnie jak w pierwszym przypadku możemy uzasadnić, że C_n jest rozłączne z $I_{n_0+2(n+1)t_0}$.

Niech teraz ciąg I_n będzie wynikiem gry, w której (I) grał zgodnie z wyżej opisaną strategią oraz $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ będzie dowolną liczbą wymierną. Wówczas istnieje n takie, że $R^n \leq q < R^{n+1}$. Ze sposobu określenia strategii wynika, że

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{\delta}{q^2} \quad \text{dla wszystkich } x \quad I_{n_0+2(n+1)t_0}.$$

To dowodzi, że gra $I_{\Sigma\alpha^n}, \Theta_\alpha, \square\, \alpha^n$ jest wygrana przez (I). ∎

Powyższe twierdzenie jest interesujące, gdyż wskazuje, jak narzucenie warunku na długość przedziałów w grze Banacha-Mazura zmienia własności tej gry. Wiemy, że jeśli A jest I-kategorii, to gra I, A jest wygrana dla (II). Okazuje się, że w grze $I_{\Sigma a_n}, A, \square\ \alpha^n$ gracz (I) może posiadać zwycięską strategię nawet w przypadku, gdy A jest I-kategorii.

§3. Aksjomat determinacji.

3.1 Sformułowanie.

Aksjomat determinacji AD został sformułowany przez H.Steinhusa polega na określeniu równoważnej gry na zbiorze otwartym.[4]

AKSJOMAT DETERMINACJI AD. *Dla każdego podzbioru $Y \quad 2^{\omega}$ gra $G_2(Y)$ jest zdeterminowana (tzn. jeden z graczy posiada strategię wygrywającą).*

Zauważmy, że istnienie strategii wygrywającej dla (I) w grze $G_2(Y)$ możemy wyrazić następująco:

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots \quad x_n \quad Y.$$

Podobnie możemy wyrazić istnienie zwycięskiej strategii dla (II)

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots \quad x_n \quad Y.$$

Wobec tego pewnym argumentem za przyjęciem aksjomatu detеminacji może być prawo logiczne $\ _x \ _y P \quad \ _x \ _y \neg P$. Oczywiście może to mieć wpływ tylko na ”prywatny” stosunek matematyka do tego aksjomatu, natomiast problem miejsca AD wśród pozostałych aksjomatów teorii mnogości (niesprzeczność,niezależność -zagadnienie to omówimy dalej) wymaga już dogłębnych badań.

3.2 Pewne równoważne formy oraz konsekwencje AD.

Zmodyfikujmy grę $G_X(Y)$ następująco: w grze $G_X(Y)$ gracz (I) może wybierać dowolny skończony ciąg elementów zbioru X (również pusty), w grze $G_X(Y)$ obaj gracze wybierają dowolny skończony niepusty ciąg elementów zbioru X. Oznaczmy przez $A_X(Y)$ zdanie: gra $G_X(Y)$ jest zdeterminowana. Analogicznie rozumiemy $A_X(Y)$ oraz $A_X(Y)$. Natomiast napisy A_X, A_X, A_X oznaczają: dla każdego

[4]informacje na temat prac zawierających dowody można znaleźć w [15], str. 237

podzbioru Y X^{ω}, odpowiednio $A_X(Y)$, A_X

$G_2(Y)$. Jeśli teraz gracze określili już przedziały $I(s_0), I(s_0$ $s_1), \ldots, I(s_0 \ \ldots \ s_{2k+1})$ to gracz (I) w swoim kolejnym ruchu wybiera przedział $I(s_0 \ \ldots \ s_{2k+1} \ s_{2k+2})$, gdzie s_{2k+2} jest wyborem zgodnym ze zwycięską strategią gracza (I) w grze $G_2(Y)$ następującym po ruchach $s_0, s_1, \ldots, s_{2k+1}$. W ten sposób określiliśmy strategię gracza (I) w grze $[0,1], \varphi(Y), G$. Uzasadnimy, że zapewnia ona wygraną gracza (I). Niech $x_0, x_1, \ldots = s_0 \ \ldots \ s_{2k+1} \ s_{2k+2} \ \ldots$ $(s_0, \ldots, s_{2k+1}, s_{2k+2}, \ldots$ jest wynikiem gry zgodnym z wyżej określoną strategią). Wiadomo, że $x_0, x_1, \ldots \quad Y$. Ponieważ $\bigcap_l I(s_0 \ \ldots \ s_l) = \{ \sum_{l=0}^{\infty} x_l$

zgodnym z wyżej opisaną strategią, to mamy

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x_l}{2^{l+1}} \quad \varphi(Y).$$

A to znaczy, że

$$x_0, x_1, \ldots \quad = s_0 \quad s_1 \quad \ldots \quad Y,$$

gdyż $\varphi^{-1}(\varphi(Y)) = Y$. ■

Z powyższego twierdzenia wynika następujący

Wniosek. *Zdanie A_X jest równoważne zdaniu, że dla każdego zbioru A $[0,1]$ gra $[0,1], A$ jest zdeterminowana.*

Dowód.

Implikacja w prawą stronę wynika łatwo z własności

$$\varphi(\varphi^{-1}(A)) = A.$$

(każdy zbiór A [0, Z p1376J/F16 14.-49622 14nt2. 9(od.)54.-498(w)-1(y) zal30

Twierdzenie 2[5]**.** *Jeśli* $\overline{\overline{X}}_1 \geq 2$, *$X_2$ jest dobrze uporządkowany oraz istnieje funkcja z X_2 na X_1, to* $A_{X_2} = \quad A_{X_1}$, $A_{X_2} = \quad A_{X_1}$ *i* $A_{X_2} = A_{X_1}$.

Udowodnimy teraz niektóre z pozostałych implikacji.

Dowód $A_n = \quad A_\omega$.

Zauważmy, że wobec Twierdzenia 2 wystarczy pokazać, że $A_2 = A_\omega$. Niech $Y_1 \quad \omega^\omega$. skonstrujuemy zbiór $Y_2 \quad 2^\omega$ taki, że $A_2(Y_2) = A_\omega(Y_1)$. Niech $\Omega \quad 2^\omega$ będzie zbiorem ciągów, w których 0 występuje nieskończenie wiele razy na parzystych oraz nieparzystych miejscach. Zdefiniujmy

$$f_i, g : \Omega \longrightarrow \omega \text{ dla } i \quad \omega$$

następująco:

$$g(s) \overset{\text{def}}{=} \min\{n : s_{ta}$$

$$f^{-1}(Y_1) \text{ oraz } \{s \quad 2^{\omega} : \ {}^{\infty}_{n} s_{2n} = 0 \quad \neg \ {}^{\infty}_{n} s_{2k+1} = 0\}.$$

Z założenia mamy, że gra $G_2(Y_2)$ jest zdeterminowana. Niech zwycięską strategię posiada (I). Określimy zwycięską strategię dla (I) w grze $G_\omega(Y_1)$. Niech liczby $n_1, n_3, \ldots \quad \omega$ będą wyborami (II), których dokona w grze $G_\omega(Y_1)$ (oczywiście nieznanymi przez (I)). Niech dalej $s \quad 2^{\omega}$ będzie takim wynikiem gry $G_2(Y_2)$ zgodnym ze zwycięską strategią (I), że (II) wybierał 0 do momentu wybrania pierwszego 0 przez (I), następnie w kolejnych $n_1 + 1$ ruchach wybierał n_1 razy 1 i potem jeden raz 0, dalej wybierał znowu 0 do momentu, w którym (I) ponownie wybrał 0, itd. (nie może się zdarzyć, że od pewnego miejsca (I) będzie wybierał tylko 1 - wynika to z określenia Y_2). Jeśli teraz w grze $G_\omega(Y_1)$ gracz (I) będzie kolejno wybierał $f_0(s), f_2(s), \ldots$, to

$$f_0(s), n_1, f_2(s), n_2 \ldots \quad Y_1,$$

gdyż $f_0(s), n_1, f_2(s), n_2 \ldots = f(s)$. To kończy dowód w przypadku istnienia strategii zwycięskiej dla (I) w grze $G_2(Y_2)$. W drugim przypadku ((II) ma strategię wygrywającą) dowód przbiega podobnie. ■

Dowód $A_\omega = \quad A_\omega$.

Niech $P_1 \quad \omega^{\omega}$. Podobnie jak wyżej, skonstruujemy $P_2 \quad \omega^{\omega}$ taki, że $A_\omega(P_2) = \quad A_\omega(P_1)$. Ustawmy wszystkie skończone ciągi liczb naturalnych (w tym również ciąg pusty) w ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Definiujemy

$$h : \omega^{\omega} \longrightarrow \omega^{\omega},$$

$$h(n_0, n_1, n_2, \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} a_{n_0} \quad n_1 \quad a_{n_2} \quad n_3 \quad \ldots .$$

Niech $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(P_1)$. Rozważmy przypadek, gdy gra $G_\omega(P_2)$ jest zdeterminowana dla (II). Niech f będzie zwycięską strategią. Określimy zwycięską strategię (II) f_1 w grze $G_\omega(P_1)$.

$$f_1(\ a_{n_0}, n_1, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{2k}}\ ) \stackrel{\text{def}}{=} f(\ n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{2k}) \quad \text{dla } k \quad \omega.$$

Jeśli teraz ciąg $a_{n_0}, n_1, a_{n_2}, \ldots$ jest zgodny z f_1, to ciąg $n_0, n_1, n_2, \ldots$ jest zgodny z f. Czyli $n_0, n_1, n_2, \ldots \quad P_2$, a to znaczy, że $a_{n_0}, n_1, a_{n_2}, \ldots \quad P_1$.

W przypadku, gdy (I) ma wygrywającą strategię w grze $G_\omega(P_2)$ dowód jest analogiczny. ∎

Dowody pozostałych implikacji ($A_\omega = \quad A_\omega$, $A_n = \quad A_\omega$) są bardzo podobne i nie będziemy ich zamieszczać (można je znaleźć w [9], str. 215)

Teraz możemy powrócić do problemu niesprzeczności i niezależności AD od pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Ponieważ, jak zauważyliśmy wcześniej, przy założeniu AC można skonstruować zbiór Y taki, że gra $G_2(Y)$ jest niezdeterminowana, więc AD i AC są sprzeczne na gruncie ZF. Dalej, ponieważ AC jest niesprzeczny z ZF, więc ¬AD jest też niesprzeczny z ZF. Problem niesprzeczności AD z ZF jest znacznie trudniejszy. Do tej pory nie został on całkowicie rozwiązany. Uzyskano wyniki, które wiążą problem niesprzeczności AD z problemem niesprzeczności innych aksjomatów dotyczących głównie istnienia dużych liczb kardynalnych. Jednym z rezultatów związanych z problemem niesprzeczności AD jest wynik Solovaya, który udowodnił, że niesprzeczność teorii ZF + AD implikuje niesprzeczność teorii ZF + AC + "istnieją nieprzeliczalne liczby kardynalne mierzalne".

Mimo, że AD i AC są sprzeczne na gruncie ZF, to okazuje się, że słabsza forma AC (WAC) wynika z AD, natomiast AC w pełnej formie jest równoważny pewnej zmodyfikowanej wersji aksjomatu determinacji.

Niech Y X^2. Oznaczmy przez $G^1_X(Y)$ grę, w której gracze

Na mocy założenia gra $G^1_X(Y)$ jest zdeterminowana. Oczywiście zwycięską strategię posiada gracz (II) (w przeciwnym przypadku istniał by taki zbiór $S_0 \quad F$, że $S_0 \cap \square F = \;$). Niech g będzie strategią

Z określenia $x_{i\quad i\quad \omega}$ widać, że $f(X_n) \quad X_n$. ∎

Z ostatniego twierdzenia wynika, że w teorii ZF+AD można udowodnić dużo twierdzeń, które wymagają użycia słabszej wersji pewnika wyboru. Mianowicie WAC wystarcza do udowodnienia σ-addytywności miary Lebesgue'a oraz rodziny zbiorów I-kategorii, równoważności dwóch definicji ciągłości funkcji: Cauchego i Heinego, a także regularności liczby ω_1.

Udowodnimy, że WAC implikuje regularność ω_1 (patrz [1], §1 str.19). Dla dowodu tego faktu skonsrułujemy rozbicie zbioru $P(\omega)$ na ω_1 rozłącznych zbiorów (tzw. rozbicie Lebesgue'a).

Niech funkcja $h : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ będzie określona wzorem

$$h(m, n) \stackrel{\text{def}}{=} 2^n(2m + 1) - 1.$$

Jest to funkcja różnowartościowa i na. Definiujemy

$$L_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{A \quad P(\omega) : A = \qquad \omega, h^{-1}(A) \quad \text{nie jest dobrym porządkiem}\},$$

$$L_n \stackrel{\text{def}}{=} \{A \quad P(\omega) : \overline{\overline{A}} = n\} \quad (0 < n < \omega),$$

$$L_\xi \stackrel{\text{def}}{=} \{A \quad P(\omega) : \ \omega, h^{-1}(A) \quad \text{jest dobrym porządkiem typu } \xi\}$$

dla $(\omega \leq \xi \leq \omega_1)$.

Uzasadnimy, że każdy z wyżej zdefiniowanych zbiorów jest niepusty. Jest to oczywiste dla zbiorów L_n $(n < \omega)$. Niech $\omega \leq \xi \leq \omega_1$. Ponieważ ξ jest liczbą porządkową przeliczalną więc istnieje funkcja równoliczności z ξ na ω. Funkcja ta wyznacza na ω relację dobrego porządku R taką, że ω, R jest typu porządkowego ξ. Wówczas $h(R) \quad L_\xi$. Oczywiste jest, że zbiory L_ξ $(\xi < \omega_1)$ są parami rozłączne i dowolny podzbiór ω należy do któregoś z nich. Funkcję f z $P(\omega)$

na ω_1 określamy następująco: $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \xi$, gdy $A \quad L_\xi$. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że w teorii ZF+AD nie można skonstruować funkcji różnowartościowej z ω_1 w $P(\omega)$, tzn. liczby kardynalne $\ _1$ i $2\ ^{0}$ są nieporównywalne.

Niech teraz $\xi_{n \ n \ \omega}$ będzie dowolnym ciągiem liczb porządkowych takich, że $\omega \leq \xi_n < \omega_1$ ($n \quad \omega$). Z WAC wynika istnienie ciągu $A_{n \ n \ \omega}$, gdzie $A_n \quad L_{\xi_n}$. Z określenia tego ciągu widać $f(A_n) = \xi_n$. Zdefiniujemy teraz relację dobrego porządku R na $\omega \times \omega$.

$$(n_1, m_1) R (n_2, m_2) \ \equiv \ (n_1 < n_2 \quad (n_1 = n_2 \quad m_1 R_{n_1} m_2)),$$

$$\text{gdzie } R_{n_1} = h^{-1}(A_{n_1}).$$

$\omega \times \omega, R$ jest przeliczalnym porządkiem, jego typ oznaczmy przez β. Widać, że β jest ograniczeniem górnym ciągu $\xi_{n \ n \ \omega}$.

Na zakończenie tego paragrafu przedstawimy niektóre konsekwencje AD. Otóż w teorii ZF+AD można udowodnić następujące fakty:

(a) Każdy zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

(b) Każdy zbiór liczb rzeczywistych ma własność Baire'a.

(c) Liczba porządkowa ω_1 jest mierzalna (tzn. istnieje nietrywialna miara określona na P(ω_1), przyjmująca wartości 0 i 1 oraz znikająca na punktach).

(d) Liczba ω_1 spełnia następującą relację podziałową $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)$

Td[(jes)-1(t)-294(p1957(¸)462(aca)-3

Fakt (b) wynika z Twierdzenia 4 w §1 oraz z wniosku w tym paragrafie. Dowód konsekwencji (a) przedstawimy w dalszej części, natomiast pozostałe pozostawimy bez dowodu ((c) i (d) patrz [4], Tw.2.5 i Tw.2.6; (e) patrz [9], str.209).

3.3 Dowód mierzalności wszystkich zbiorów na prostej.

Udowodnimy twierdzenie o mierzalności w sensie Lebesgue'a wszys-

Lemat. *Dla dowolnego zbioru liniowego M miary Lebesgue'a zero i dowolnego szeregu zbieżnego liczb dodatnich* $\sum \varepsilon_i$ *istnieje pokrycie* $S_{n_i}\ i\ \omega$ *zbioru M o własności*

$$_i\ m(S_{n_i}) \leq \varepsilon_i.$$

Dowód.

Wystarczy udowodnić tezę dla szeregów o wyrazach wymiernych. Niech $\varepsilon := \sum_i \varepsilon_i$. Istnieje ciąg przedziałów $I_i\ i\ \omega$

Przedziały $I^{(l)}_{1,k_{l+1}}$, $I^{(l)}_{k_{l+1}+1}$, $I^{(l)}_{k_{l+1}+2}, \dots$ oznaczamy odpowiednio $I_0^{(l+1)}$, $I_1^{(l+1)}$, $I_2^{(l+1)}, \dots$.

Na mocy zasady indukcji określiliśmy ciąg $\langle S_{n_i} : i \in \omega \rangle$. Ze sposobu konstrukcji widać, że spełnia on własności

$$\bigcup S_{n_i} = \bigcup I_i, \qquad \sum_i m(S_{n_i}) \le \sum_{i=0}^{k_i-1} |I_i^{(i-1)}| + |I_{0,k_i}^{(i-1)}| = \varepsilon_i,$$

czyli jest szukanym pokryciem. ∎

Twierdzenie 3 (Mycielski, Świerczkowski) [10]. *Załóżmy, że zachodzi AD. Wówczas każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.*

Dowód.

Oczywiście wystarczy udowododnić, że każdy podzbiór odcinka [0,1] jest mierzalny. Niech $E \subseteq [0,1]$ będzie dowolnym zbiorem. Pokażemy, że $m^*(E) = m_*(E)$. Z własności miary wewnętrznej wiemy, że istnieje $E_1 \subseteq E$ typu F_σ o mierze równej $m_*(E)$. Więc zbiór $E \setminus E_1$ ma miarę wewnętrzną równą zero. Czyli wystarczy pokazać, że $m^*(E \setminus E_1) = 0$.

Oznaczmy $E \setminus E_1$ przez E . Niech $\varepsilon > 0$ dowolne ustalone. skonstruujemy pokrycie zbioru E zbiorami z ciągu $\langle S_n : n \in \omega \rangle$, których suma miar jest mniejsza od ε.

Zdefiniujemy teraz ciąg liczbowy $\langle a_n \rangle$ oraz zbiór $A \subseteq \omega^\omega$.

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{10^{2i+1}} \quad (i \in \omega);$$

$$\langle n_0, n_1, n_2, \dots \rangle \in A \text{ wtedy i tylko wtedy,}$$

[10] podajemy dowód według L.Harringtona, patrz [4] roz.II

gdy zachodzi przynajmniej jeden z poniższych warunków:

(1) $$m(S_{n_{2i+1}}) \geq a_i \quad \text{dla pewnego } i,$$

(2) liczba $r = 0, n_0 n_2 n_4 n_6 \ldots$ (w rozwinięciu dziesiętnym) należy do E , natomiast nie należy do żadnego ze zbiorów $S_{n_1}, S_{n_3}, S_{n_5}, \ldots$.

Ponieważ zakładamy AD, więc gra $G_\omega(A)$ jest zdeterminowana (patrz warunek (1) w 3.2). Pokażemy, że ta gra jest zdeterminowana dla (II).

Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech f będzie zwycięską strategią gracza (I). Określimy odworowanie $\tilde{f}$ z przestrzeni ω^ω w odcinek [0,1]. Niech $n_1, n_3, n_5, \ldots \quad \omega^\omega$. Określamy

$$n_0 = f(\ ),\ n_2 = f(n_0, n_1), \ldots,\ n_{2k} = f(n_0, n_1, \ldots, n_{2k-1}).$$

Wówczas

$$\tilde{f}(\ n_1, n_3, n_5, \ldots\ ) \stackrel{\text{def}}{=} 0, n_0 n_2 n_4 \ldots.$$

Funkcja $\tilde{f}$ jest oczywiście ciągła. Określimy teraz zbiór $P \quad \omega^\omega$.

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{\ n_1, n_3, n_5, \ldots\ : m(S_{n_{2i+1}}) < a_i\ (i \quad \omega)\}.$$

Zbiór P jest domknięty. Rzeczywiście, jeśli $n_1^k, n_3^k, n_5^k, \ldots \quad \to \quad n_1, n_3, n_5, \ldots$ (gdzie $n_1^k, n_3^k, n_5^k, \ldots \quad P$), to

$$_i \quad _{k_i}\ n_1 = n_1^{k_i}, n_3 = n_3^{k_i}, \ldots, n_{2i+1} = n_{2i+1}^{k_i}.$$

A stąd wynika, że

$$_i\ m(S_{n_{2i+1}}) < a_i.$$

Oznaczmy przez P obraz P przy odwzorowaniu $\tilde{f}$. Ponieważ funkcja $\tilde{f}$ jest ciągła, więc P jest zbiorem analitycznym (Wniosek 1), a zatem mierzalnym (Tw.2).

Pokażemy, że $P \quad E$. Jeśli $x \quad P$, to $x = \tilde{f}(\ n_1, n_3, n_5, \ldots\ )$. Ponieważ f jest zwycięską strategią dla (I), więc $\ n_0, n_1, n_2, \ldots \quad A$. Ale ciąg $\ n_0, n_1, n_2, \ldots\ $ nie spełnia własności (1) (bo jest elementem P), więc musi spełniać (2). A z tego wynika, że $x \quad E$.

Ponieważ $m\ (E\ ) = 0$, więc $m(P\ ) = 0$. Niech $S_{n_1}, S_{n_3}, S_{n_5}, \ldots$ będzie pokryciem zbioru P, które nie spełnia własności (1), tzn. $\ n_1, n_3, n_5, \ldots \quad P$ (takie istnieje z Lematu). Oczywiście $x = \tilde{f}(\ n_1, n_3, n_5, \ldots\ ) \quad P$. A stąd wynika, że $x \quad S_{n_{2k+1}}$ dla pewnego k. Wobec tego ciąg

$$f(\ ),\ n_1,\ f(f(\ ), n_1),\ n_3,\ f(f(\ ), n_1, f(f(\ ), n_1), n_5),\ n_5, \ldots$$

nie spełnia żadnego z warunków (1) i (2), czyli nie należy do A. Otrzymaliśmy sprzeczność z tym, że f jest zwycięską strategią gracza (I).

Zatem $G_\omega(A)$ jest wygrana dla (II). Niech g będzie wygrywającą strategią dla (II). Zdefiniujmy następujące zbiory

$N = \{0, 1, \ldots, 9\}$,

$N_1 = \{g(n_0) : n_0 \quad N\}$,

$N_3 = \{g(n_0, n_1, n_2) : n_0, n_2 \quad N, \quad n_1 = g(n_0)\}$,

$$\vdots$$

$$N_{2k+1} = \{g(n_0, \ldots, n_{2k}) : n_{2i} \quad N,\ n_{2i+1} = g(n_0, \ldots, n_{2i}),\ i \leq k-1\},$$

(N_{2k+1} - zbiór wszystkich możliwych wyborów gracza (II) w k-tym ruchu zgodnych z g, przy założeniu, że wcześniejsze jego wybory były zgodne z g, a (I) wybierał dowolne liczby ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$).

Każdy ze zbiorów N_{2k+1} ma niewięcej niż 10^k elementów oraz $m(S_i) < a_k$ dla $i \quad N_{2k+1}$. Oznaczmy zbiór $\square_i N_{2i+1}$ przez V, zaś $\square_{l\ V} S_l$ przez W. Zbiór W zawiera E. Rzeczywiście. Niech $x \quad E$

i $0, n_0 n_2 n_4 \ldots$ będzie dziesiętnym rozwinięciem x takim, że n_{2i} $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Wtedy

$$n_0, n_1, n_2, \ldots \quad A, \quad \text{gdzie } n_1 = g(n_0),\ n_3 = g(n_0, n_1, n_2), \ldots .$$

Z definicji zbioru A oraz z tego, że x E widać, że x $S_{n_{2k+1}}$ dla pewnego k. Ale n_{2k+1} N_{2k+1} V, więc x W.

Dalej otrzymujemy

$$m(W) \leq \square_{l \ V} m(S_l) \leq \square_{k} \square_{i \ N_{2k+1}} m(S_i) \leq \square_{k} 10^k a_k \leq \varepsilon \square_{k} \frac{10^k}{10^{2k+1}} < \varepsilon.$$

Zatem pokazaliśmy, że istnieje pokrycie zbioru E elementami ciągu $S_{n \ n \ \omega}$, których suma miar jest mniejsza od ε, co wobec dowolności ε oznacza, że $m(E\ ) = 0$. ∎

Twierdzenie 4 można uogólnić na dowolną przestrzeń metryczną ośrodkową. Otóż zachodzi (w ZF + AD)

Wniosek 2 [11]. *Niech E będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, a μ σ-addytywną, skończoną miarą borelowską na E. Wówczas każdy podzbiór X E jest μ-mierzalny, tzn.*

$$_{B_1, B_2 \ B(E)} \ B_1 \quad X \quad B_2 \ \ i \ \ \mu(B_1) = \mu(B_2).$$

Przed dowodem wniosku przytoczymy twierdzenie o izomorfizmie miar.

Definicja. *Zbiór X $B(Z)$, gdzie Z jest przestrzenią metryczną ośrodkową i zupełną, nazywamy absolutnie borelowskim (oznaczamy X B).*

[11] patrz [11]

Definicja. *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie bijekcją (X, Y przestrzenie metryczne). Odwzorowanie f nazywamy homeomorfizmem uogólnionym, gdy zarówno obraz jak i przeciwobraz dowolnego zbioru borelowskiego jest zbiorem borelowskim.*

Twierdzenie 4 [12]**.** *Dla każdych dwóch skończonych, borelowskich miar ciągłych, μ na przestrzeni X B oraz ν na przestrzeni Y B takich, że $\mu(X) = \nu(Y) > 0$, istnieje homeomorfizm uogólniony $\varphi : X \longrightarrow Y$ zachowujący miarę, tzn. $\mu(E) = \nu(\varphi(E))$ dla każdego zbioru borelowskiego E X.*

Dowód Wniosku 2.

Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że μ jest unormowana i bezatomowa (bo μ jest skończona). Wiadomo (patrz np. [5], roz.XIV §4), że każda przestrzeń metryczna ośrodkowa jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem kostki Hilberta H (fakt ten wymaga użycia tylko słabej formy aksjomatu wyboru tzn. WAC). Niech

$$h : E \longrightarrow H$$

będzie homeomorfizmem w kostkę Hilberta. Określimy teraz miarę na podzbiorach borelowskich H. Niech

$\nu($[illegible]

zachowujący miarę. Wobec mierzalności wszystkich podzbiorów $[0, 1]$ mamy, że każdy podzbiór H jest ν-mierzalny. Dalej otrzymujemy dla dowolnego podzbioru $X \quad E$

$$_{B_1, B_2 \;\; B(E)} \; h(B_1) \quad h(X) \quad h(B_2) \;\; \nu(h(B_1)) = \nu(h(B_2)).$$

A to znaczy, że

$$_{B_1, B_2 \;\; B(E)} \; B_1 \quad X \quad B_2 \;\text{ i }\; \mu(B_1) = \mu(B_2). \qquad \blacksquare$$

Literatura.

[1] L.Bukovsky, *Struktura realnej osi*, VEDA vydavatelstwo Slovenskej akademie vied, Bratislava 1979.

[2] R.Engelking, *Topologia ogólna*, PWN 1976.

[3] W.Guzicki i P.Zbierski, *Podstawy teorii mnogości*, PWN 1978.

[4] E.M.Kleinberg, *Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness*, Springer -Verlag 1977.

[5] K.Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN 1980.

[6] K.Kuratowski i A.Mostowski, *Teoria Mnogości*, PWN 1978.

[7] E.Marczewski, *On absolutely measurable sets and functions*, Collected Mathematical Papers, Warszawa 1996, 160-186.

[8] R.Murawski, *Filozofia Matematyki*, PWN 1995.

[9] J.Mycielski, *On the axiom of determinateness*, Fund. Math. 53 (1964), 205-224.

[10] J.Mycielski and H.Steinhaus, *A mathematical axiom contradicting the axiom of choice*, Bull. Acad. Polon. Sci., Series Math., Astr., Phys. 10 (1962), 1-3.

[11] J.Mycielski and Świerczkowski, *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*, Fund. Math. 54 (1964), 67-71.

[12] J.C.Oxtoby, *The Banach-Mazur game and the Banach category theorem, Contrybutions to the theory of games*, Vol. III, Annals of Math. Studies no. 39, Princeton 1957, 159-163.

[13] J.C.Oxtoby, *Measure and Category*, Graduate Texts in Mathematics, Springer -Verlag 1971.

[14] W.M.Schmidt, *On badly aproximable numbers and certain games*, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966).

[15] R.Telgarsky, *Topological games: On the 50th anniversary of the Banach-Mazur game*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 17, no. 2, Spring 1987, 227-276.

[16] O.Zindulka, *Killing residual measures*, Lecture on Winter School on abstract analysis, Harrachow 1992.